продукции. Стандартизация овощей и картофеля: учебное пособие / А. М. Спиридонов. – Санкт-Петербург: СПбГАУ, 2023. – 80 с. – Текст: непосредственный.

References

1. Semenovodstvo kartofelya: uchebnoe posobie / A.I. Uskov, E.V. Oves, L.B. Uskova [i dr.]. – Moskva: INFRA-M, 2026. – 162 s.

2. Kalinin, A. B. Mirovye tendentsii i sovremennye tekhnicheskie sistemy dlya vozdelyvaniya kartofelya: uchebnoe posobie / A. B. Kalinin, V. A. Ruzhev, I. Z. Teplinskiy. – Sankt-Peterburg: Prospekt nauki, 2024. – 160 s.

3. Tekhnologii vozdelyvaniya ovoshchnykh, bakhchevykh kultur, kartofelya, pryano-aromaticheskikh i lekarstvennykh rasteniy: monografiya / A. A. Autko, V. K. Pestis, V. V. Grakun [i dr.]; pod obshch. red. A. A. Autko; Nats. akad. nauk Belarusi. – Minsk: Belaruskaya navuka, 2021. – 615 s.

4. Lektsii po kursu “Osnovnye protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii”: uchebno-metod. posobie / sostavili Zh.T. Eshova, D.N. Akbaeva. – Almaty, Kazak universitet, 2017 – 392 s.

5. Kasatkin A. G. Osnovnye protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii ucheb. dlya vuzov / A.G. Kasatkin. – Izd. 11-e, ster., dorab. – Moskva: AlyanS, 2005. – 750 s.

6. Kolin A.R. Ispolzovanie chastey klubnya na semena // Kartofel i ovoshchi. – 1983. – No. 2. – S. 8-9.

7. Zubkov V.E. Razrabotka ustroystva dlya rezki klubney kartofelya pered posadkoy (rekomendatsii) / V.E. Zubkov. – Lugansk: Elton-2, 2012. – 16 s.

8. Spiridonov, A. M. Standartizatsiya i podtverzhdenie sootvetstviya selskokhozyaystvennoy produktsii. Standartizatsiya ovoshchey i kartofelya: uchebnoe posobie / A. M. Spiridonov. – Sankt-Peterburg: SPbGAU, 2023. – 80 s.

✦ ✦ ✦

УДК 631.3:621.929.7
DOI: 10.53083/1996-4277-2026-265-11-79-85

И.Я. Федоренко, А.М. Левин, А.В. Пиянзин
I.Ya. Fedorenko, A.M. Levin, A.V. Piyanzin

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ЗАДАЧАХ ВИБРОПЕРЕМЕЩЕНИЯ СЫПУЧИХ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

COMPUTATIONAL EXPERIMENT IN THE PROBLEMS OF VIBRATORY DISPLACEMENT OF BULK AGRICULTURAL MATERIALS

Ключевые слова: *вибрация, модель в виде материальной частицы, обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), численное решение ОДУ на компьютере, методы решения.*

Рассматриваются методы численного моделирования (численные методы, компьютерное моделирование) с использованием Mathcad для анализа взаимодействия частицы с шероховатой поверхностью. Основное внимание уделяется характеристикам вибрации (частота, амплитуда), а также влиянию шероховатости поверхности на динамику перемещения (параметры шероховатости, коэффициенты трения). Результаты показывают, как изменение этих параметров влияет на стабильность и скорость перемещения частицы, что может быть полезно для оптимизации процессов в различных инженерных приложениях. Показано, что динамика плоской частицы на вибрирующей шероховатой поверхности определяется сложным взаимодействием сил инерции, тяжести, трения и нормальной реакции, а её анализ требует учёта множества параметров и часто сводится к численному моделированию. Описаны алгоритмы и комплекс программ для математического моделирования в системах компьютерной математики нелинейных ОДУ. Для вычислительного эксперимента использовали план Плакетта-Бермана для 3 факторов. План содержит 15 опытов и пригоден как для реальных, так и вычислительных экспериментов. В процессе нашего вычислительного эксперимента факторы изменяли на уровнях: A = 0,001; 0,002 и 0,003 м; ω = 100, 200 и 300 $с^{-1}$; α = 0,08; 0,18 и 0,28 радиан. Эти значения вносили, в соотвествии с планом эксперимента, в компьютерную программу. Каждый такой прогон давал определенное значение средней скорости виброперемещения V. Для получения коэффициентов уравнения регрессии воспользовались подпрограммой *polyfitc*, имеющейся в Mathcad. Регрессионный анализ самого уравнения, проведенный при помощи подпрограммы *polyfitstat Mathcad,* показал, что коэффициент конкордации $R2$ составил 0,973. Это указывает на адекватное описа-

ние уравнением регрессии данных, полученных численным решением ОДУ. Компьютерное отображение вибрационных процессов на основе модели единичной частицы – это инструмент для изучения базовых механизмов движения частиц под действием вибраций. Показано, как нужно проводить вычислительный эксперимент для поиска требуемых закономерностей и оптимизации процессов.

Keywords: *vibration, particle model, ordinary differential equations (ODE), numerical solution of ODEs on a computer, solution methods.*

The numerical modeling methods (numerical methods, computer simulation) using Mathcad to analyze the interaction of a particle with a rough surface are discussed. The main focus is on vibration characteristics (frequency, amplitude) as well as the influence of surface roughness on displacement dynamics (roughness parameters, friction coefficients). The results show how the change of these parameters affects the stability and speed of particle movement which may be useful for optimizing processes in various engineering applications. It is shown that the dynamics of a flat particle on a vibrating rough surface are determined by a complex interaction of inertia forces, gravity, friction, and normal reaction, and its analysis requires consideration of many parameters and often comes down to numerical modeling. The algorithms and a software package for mathematical modeling of nonlinear ODEs in computer mathematics systems are described. The Plackett-Berman design for three factors was used for the computational experiment. The plan contains 15 experiments and is suitable for both real and computational experiments. During our computational experiment, the factors were varied at the following levels: A = 0.001; 0.002 and 0.003 m; ω = 100, 200 and 300 s^{-1}; α = 0.08, 0.18 and 0.28 radians. These values were entered into the software in accordance with the experimental design. Each such run yielded a specific value of the average vibration displacement velocity V. The polyfitc subroutine available in Mathcad was used to obtain the coefficients of the regression equation. A regression analysis of the equation itself, conducted using Mathcad polyfitstat subroutine revealed a concordance coefficient $R2$ of 0.973. This indicates that the regression equation adequately describes the data obtained by numerically solving the ODE. Thus, computer representation of vibration processes based on the single-particle model is a tool for studying the fundamental mechanisms of particle motion under vibration. It also demonstrates how to conduct a computational experiment to identify the desired patterns and optimize the processes.

Федоренко Иван Ярославович, д.т.н., профессор, ФГБОУ ВО Алтайский ГАУ, г. Барнаул, Российская Федерация, e-mail: ijfedorenko@mail.ru.
Левин Алексей Михайлович, д.т.н., генеральный директор, ООО «Еврогруп», г. Барнаул, Российская Федерация, e-mail: lev-alex@mail.ru.
Пиянзин Александр Васильевич, директор, ООО СПК «Вертикаль», г. Барнаул, Российская Федерация, e-mail: alexp-@mail.ru.

Fedorenko Ivan Yaroslavovich, Dr. Tech. Sci., Prof., Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation, e-mail: ijfedorenko@mail.ru.
Levin Aleksey Mikhaylovich, Dr. Tech. Sci., General Director, OOO Eurogroup, Barnaul, Russian Federation, e-mail: lev-alex@mail.ru.
Piyanzin Aleksandr Vasilevich, Director, OOO SPK Vertikal, Barnaul, Barnaul, Russian Federation, e-mail: alexp-@mail.ru.

Введение

Данная научная проблема имеет особое значение для моделирования рабочих процессов многочисленных вибрационных технологических машин, обрабатывающих сыпучие материалы (зерно, крупу, сахарный песок и т.д.). Хотя в машине материал находится в виде слоя определенной толщины, но при определенных условиях движение слоя может моделироваться одиночной частицей. По заключению И.И. Блехмана, при сравнительно небольшой толщине слоя (не более 20-30 среднего размера частицы и не слишком интенсивной вибрации $(A\ w^2 < 10\ g;\ 20\ c^{-1} < w < 300\ c^{-1})$ допустимо считать, что слой колеблется как единое целое, и его движение можно рассматривать как движение материальной точки (частицы) [1]. Среди динамических режимов указанных процессов существует большой класс режимов, т. н. безотрывного вибрационного перемещения [1-6].

Под эффектом вибрационного перемещения понимается возникновение направленного в среднем движения частиц и тел под действием ненаправленных в среднем вибрационных (колебательных) воздействий [1].

Этим термином обозначается большая совокупность процессов, зачастую существенно не похожих друг на друга. Сюда, например, относятся процессы транспортирования твердых и сыпучих тел, их сепарация, разрыхление, уплотнение и т.д.

Основные закономерности вибрационного перемещения могут быть изучены на простых моделях динамического поведения материаль-

ной частицы на вибрирующей шероховатой поверхности. Дело в том, что вибрационное перемещение – это чисто нелинейный эффект, обусловленный действием сухого (кулонова) трения. Шероховатая поверхность как раз и обладает признаками такого трения.

Хотя расчетные физические модели просты, но построенные на их основе математические модели являются нелинейными, потому аналитически решаются, чаще всего, приближенными методами. Это приводит к количественным, а иногда и качественным погрешностям. Даже численное решение данных нелинейных дифференциальных уравнений на компьютере часто приводит к некоторым трудностям методического свойства, что и будет показано в данной работе.

Рассмотренные ниже компьютерные модели вибрационного перемещения позволяют изучить основные свойства и закономерности рассматриваемого эффекта и оптимизировать технологический процесс по выбранному критерию оптимальности.

Целью исследования является анализ влияния вибрации шероховатой плоскости на движение частиц.

Объекты и методы

Начнем изложение с простейшей задачи динамического поведения плоской материальной частицы, находящейся на вибрирующей в своей плоскости горизонтальной шероховатой поверхности (рис. 1). Это расчетная модель некоторых просеивающих устройств. Но и в той простой задаче, в связи с ее нелинейностью и жесткостью, уже проявляются проблемы ее компьютерного моделирования.

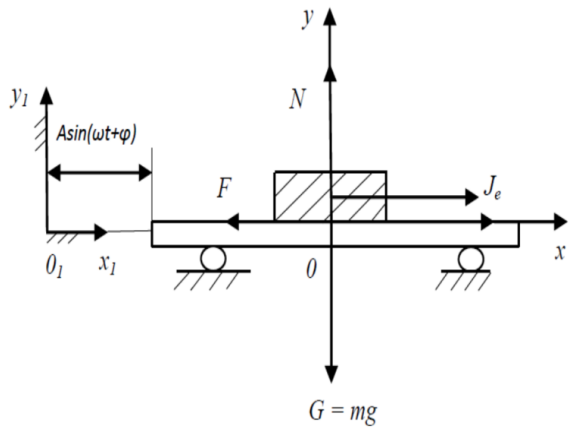


Рис. 1. Частица на вибрирующей платформе

В основе математической модели положено дифференциальное уравнение движения частицы относительно вибрирующей платформы, учитывающее:

- переносную силу инерции I_e, возникающую из-за колебаний поверхности;
- силу тяжести G;
- силу сухого (кулонова) трения F;
- нормальную реакцию опоры N.

С учетом перечисленных сил дифференциальное уравнение относительного движения частицы запишем в виде:

$$m\ddot{x} + mgfsign(\dot{x}) = mA\omega^2 sin\omega t, \quad (1)$$

где m – масса частицы;

g – ускорение свободного падения;

f – коэффициент трения;

A, ω – амплитуда и частота колебаний;

$sign(\dot{x})$ – кусочно-постоянная функция вещественного аргумента.

После упрощения и введения новых величин уравнение принимает лаконичный вид [1-3]:

$$\eta'' + zsign(\eta') = sin\tau, \quad (2)$$

где $\eta'' = (x/(A\omega\text{^}2)$;

$\eta' = (x/(A\omega))$;

z= $gf/(A\omega\text{^}2)$.

Жесткость уравнению (2) придает ступенчатая функция $sign(\eta')$.

Особенности решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) заключаются в необходимости использования неявных численных методов (BDF, Radau, Розенброк) из-за неустойчивости классических явных методов (таких как метод Эйлера или явные методы Рунге-Кутты).

Жесткие системы характеризуются наличием одновременно как быстрозатухающих, так и медленных процессов, что накладывает жесткие ограничения на шаг интегрирования.

В зависимости от условий задачи (угол наклона поверхности, характеристики вибрации и трения и т. д.) дифференциальные уравнения виброперемещения частицы могут усложняться. В частности, закон Кулона чаще всего для реальных условий не выполняется. Эксперименты показывают более сложную зависимость, в том числе для сельскохозяйственных материалов. Уточненную характеристику трения обычно записывают в виде суммы характеристик сухого и нелинейного вязкого трения:

$$F=N(f_0 sign(v) - f_1 v + f_3 v^3), \quad (3)$$

где N – нормальная реакция;

$f_0 > 0$, $f_1 > 0$, $f_3 > 0$ – постоянные коэффициенты;

v – относительная скорость в контакте трущихся тел.

Зависимость (3) называют некулоновой или посткулоновской моделью трения. На ее основе исследуются автоколебания [2, 3, 7], а также различные технологические процессы [4].

В наших обозначениях зависимость коэффициента трения от скорости представлена на рисунке 2, откуда следует, что коэффициент скорости покоя больше коэффициента трения скольжения. Последний принимает наименьшее значение в точках v_m и $-v_m$.

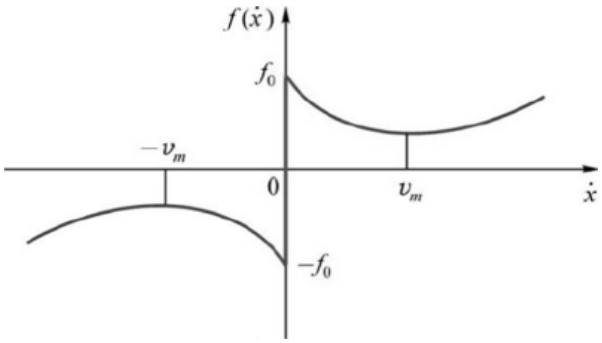


Рис. 2. Характеристика некулонова трения

Расчетная модель для этого случая представлена на рисунке 3. Именно этой моделью возможно представление огромного количества реальных технологических процессов и вибрационных устройств.

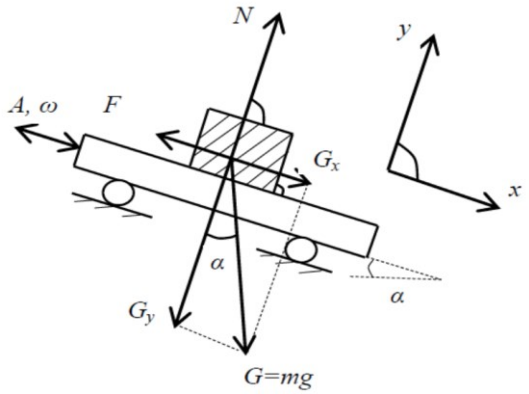


Рис. 3. Частица на вибрирующей платформе, наклоненной к горизонту

Дифференциальное уравнение движения частицы для этого случая запишем в таком виде:

$$m\ddot{x} + mgf_0 cos(\alpha) sign(\dot{x}) + mgcos(\alpha)$$

$$(f_3 \dot{x}^3 - f_1 x) - m\dot{g}sin(\alpha) = mA\omega^2 sin\omega t.$$

После сокращения на m математическая модель примет окончательный вид:

$$\ddot{x} + gf_0 cos(\alpha) sign(\dot{x}) + gcos(\alpha)$$

$$(f_3 \dot{x}^3 - f_1 x) - \dot{g}sin(\alpha) = A\omega^2 sin\omega t. \quad (3)$$

Введение в этом уравнении безразмерных параметров нецелесообразно, так как число таких параметров существенно увеличивается, а их физический смысл не имеет однозначного толкования.

Результаты исследований и их обсуждение

Компьютерное исследование начали с решения простого ОДУ, содержащего член с кулоновским трением (2).

Решение проводили в программе *Mathcad Prime*. Для решения жестких ОДУ в ней предусмотрена подпрограмма *Odesolve* с методами: *BDF, Radau, Рунге-Кутты с изменяющимся шагом.*

Однако ни один из этих методов при количестве шагов 1000 (по умолчанию), разбивающих интервал интегрирования ОДУ, не дал решения. И только увеличение этих шагов на порядок привел к успеху методов *Radau* и *Рунге-Кутты с фиксированным шагом* (хотя ожидали работоспособность этого метода с адаптирующимся шагом).

Примеры компьютерного решения с визуализацией последнего в виде графиков для характерных точек: $z = 0$; $z = 0{,}8$; $z = 1$ представлены на рисунке 4.

Анализ полученных данных показывает, что компьютерное решение дает правильные качественные и количественные результаты. Например, при $z = 0{,}8$ хорошо видны участки относительной остановки частицы в каждом периоде колебаний. Отображение этих участков при чисто математическом подходе требует трудоемкого решения нескольких трансцендентных уравнений.

Компьютерная программа и пример решения более сложного уравнения (3) представлены на рисунках 5, 6. В связи с ограниченностью доступа к последним версиям *Mathcad* мы испробовали старую версию, а именно Mathcad 15 при решении нашей задачи. Сразу отметим, что по возможностям решения данного класса ОДУ эта версия ничем не уступает возможностям более поздних версий *Mathcad.*

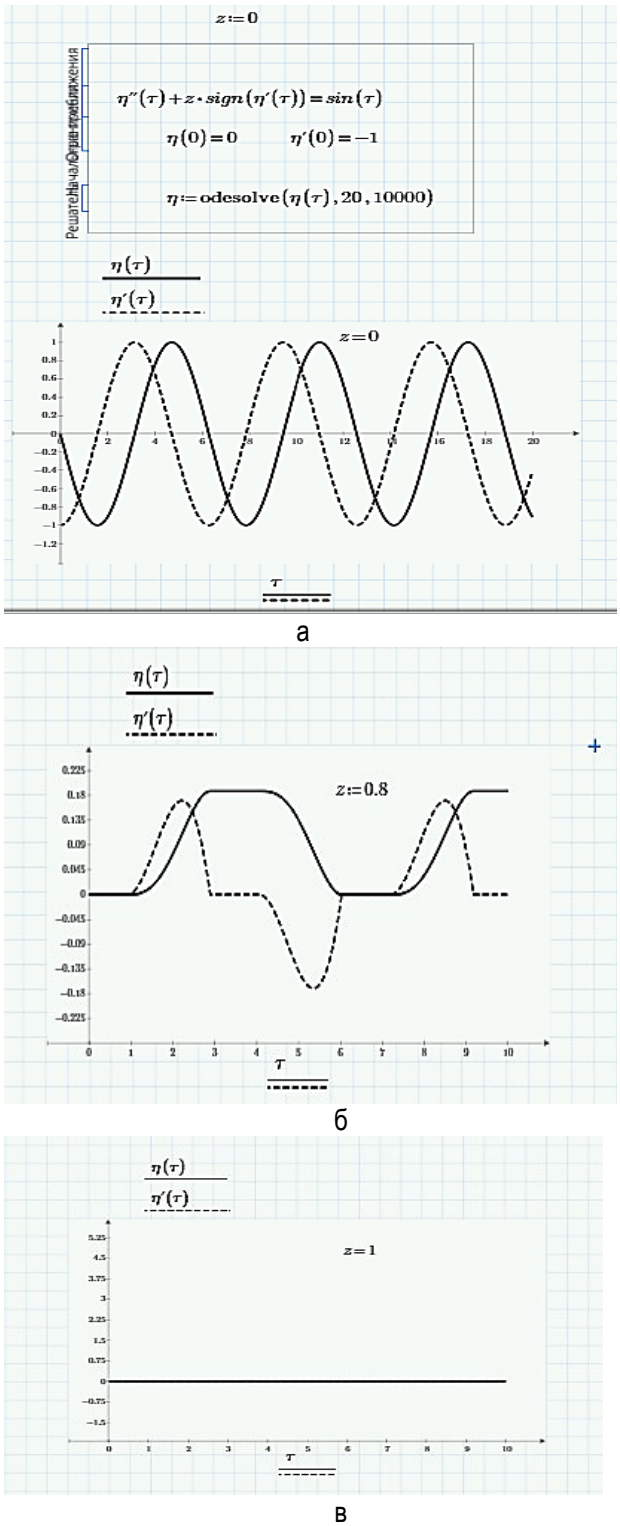


Рис. 4. Компьютерное решение ОДУ (2) для значений параметра z: z = 0; z = 0,8; z = 1

Также можно отметить лучшие результаты методов *Radau* и *Рунге-Кутты с фиксированным шагом.*

На рисунке 6 представлено выражение для вычисления средней скорости *V* виброперемещения частицы по вибрирующей плоскости. От нее часто зависит производительность технологической машины. Примем ее в качестве критерия оптимальности при оптимизации процесса. В качестве факторов процесса установим величины: *A, ω* – амплитуда и частота колебаний, а также α – угол наклона плоскости к горизонту. Коэффициенты, характеризующие свойства фрикционной пары, варьировать не будем.

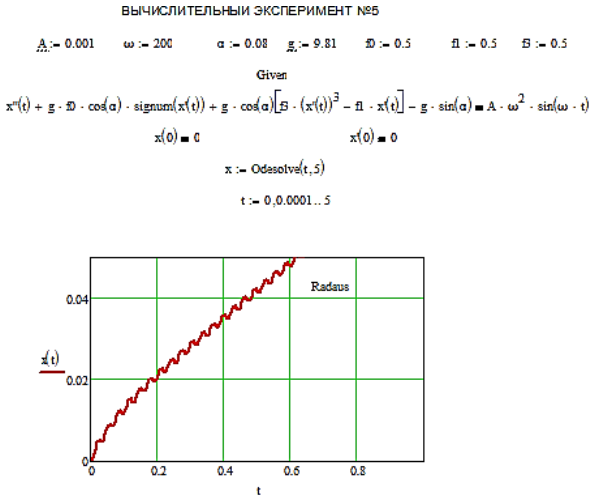
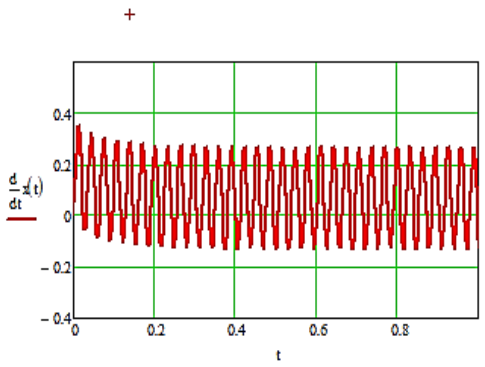


Рис. 5. Пример решения ОДУ (3), отображающего перемещение частицы



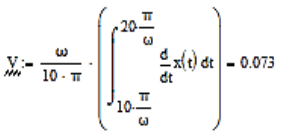


Рис. 6. Пример решения ОДУ (3), отображающего скорость частицы, в т.ч. ее среднюю скорость V

Для вычислительного эксперимента используем план Плакетта-Бермана для трех факторов. Его можно найти в *Mathcad* среди функций группы «Планирование эксперимента». План содержит 15 опытов и пригоден как для реальных, так и вычислительных экспериментов. В

процессе нашего вычислительного эксперимента факторы изменяли на уровнях: A = 0,001; 0,002 и 0,003 м; ω = 100, 200 и 300 $с^{-1}$; α = 0,08; 0,18 и 0,28 радиан. Эти значения вносили, в соответствии с планом эксперимента, в компьютерную программу (рис. 5).

Каждый такой прогон давал определенное значение средней скорости виброперемещения *V*.

Для удобства дальнейшей обработки эксперимента все факторы были кодированы по известным правилам.

Для получения коэффициентов уравнения регрессии воспользовались подпрограммой *polyfitc*, имеющейся в Mathcad. Само уравнение регрессии было получено в виде

$$Y(X1, X2, x3) = 0{,}317 + 0{,}129X1 + 0{,}141X2 + \\ + 0{,}071X3 + 0{,}019X1X2 + 0{,}023X1X3 + 0{,}014X2X3 - \\ - 0{,}139(X1)^2 - 0{,}032(X1)^2 - 0{,}002(X3)^2.$$

Регрессионный анализ этого уравнения, проведенный при помощи подпрограммы *polyfitstat Mathcad,* показал, что коэффициент конкордации R2 составил 0,973. Это указывает на адекватное описание уравнением регрессии данных, полученных численным решением ОДУ.

Для анализа уравнения регрессии можно привлечь графическое представление данных. Например, хотим наглядно увидеть влияние *A, ω* – амплитуды и частоты колебаний шероховатой плоскости. Третий фактор устанавливаем на нулевом уровне, при этом получим укороченное уравнение регрессии:

$$Y(X1, X2) = 0{,}317 + 0{,}129X1 + 0{,}141X2 + \\ + 0{,}019X1X2 - 0{,}139(X1)^2 - 0{,}032(X1)^2.$$

Этому уравнению отвечает соответствующий *3D*-график (рис. 6).

Хорошо видно, что скорость виброперемещения существенно зависит от параметров вибрации, причем существует оптимум по критерию *V*. Этот факт ранее установил аналитическим путем Г.Я. Пановко [4].

Таким образом, одно из важнейших свойств многих вибрационных технологических процессов – существование оптимальных параметров вибрации не описывается при упрощенном представлении характеристики трения. Для адекватного описания этих свойств приходится учитывать уточненные характеристики трения, что позволяет получить не просто количественное уточнение результатов, а выявить и описать основные качественные закономерности процесса [4].

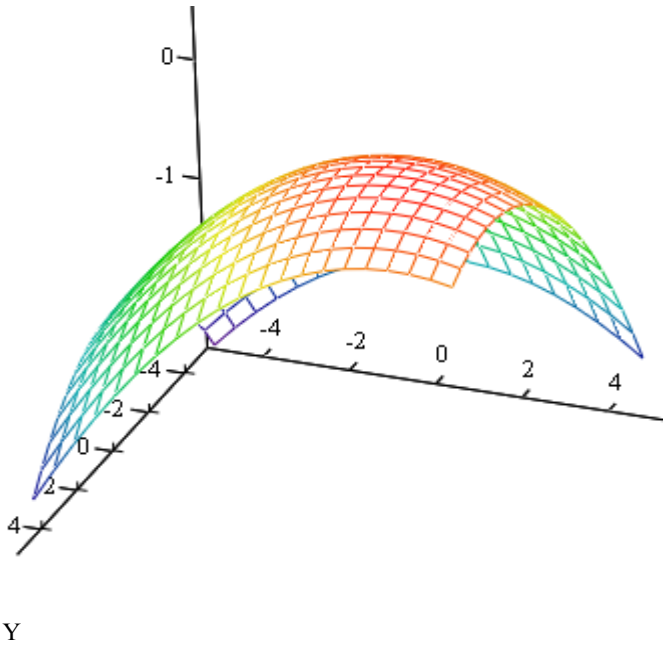


Рис. 7. Влияние амплитуды (A) и частоты (ω) колебаний шероховатой плоскости (горизонтальные оси координат) на среднюю скорость V виброперемещения частицы (вертикальная ось)

Выводы

1. Проведено компьютерное моделирование процесса безотрывного виброперемещения частицы относительно плоскости, расположенной под некоторым углом к горизонту, и вибрируемой в своей плоскости. Получены графики, ха-

рактеризующие это движение. Установлено, что особенностью ОДУ, описывающих данные процессы, является их жесткость. При численном решении работоспособными оказались подпрограммы *Radau* и *Рунге-Кутты с фиксированным,* но уменьшенным шагом интегрирования.

2. Таким образом, компьютерное отображение вибрационных процессов на основе модели единичной частицы – это инструмент для изучения базовых механизмов движения частиц под действием вибраций. При этом показано, как нужно проводить вычислительный эксперимент для поиска требуемых закономерностей и оптимизации процессов.

3. Для упрощения работы с информацией и ускорения поиска данных использовали ИИ-платформу INVENTORUS. Она позволяет быстро анализировать научные статьи, визуализировать результаты и находить нужные данные для анализа вибрационных процессов в агропромышленном комплексе.

Библиографический список

1. Блехман, И. И. Вибрационная механика / И. И. Блехман. – Москва: Физматлит, 1994. – 400 с. – Текст: непосредственный.

2. Вибрации в технике: справочник. В 6 томах / редакционный совет В. Н. Челомей (пред.). – Москва: Машиностроение, 1979. – Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под редакцией И. И. Блехмана. – 1979. – 351 с. – Текст: непосредственный.

3. Вибрации в технике: справочник. В 6 томах / редакционный совет В. Н. Челомей (пред.). – Москва: Машиностроение, 1981. – Т. 4. Вибрационные машины и процессы / под редакцией Э. Э. Лавендела. – 1981. – 509 с. – Текст: непосредственный.

4. Пановко, Г. Я. Динамика вибрационных технологических процессов / Г. Я. Пановко. – Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. – 176 с. – ISBN 978-5-4344-0711-3. – URL: https://www.iprbookshop.ru/91927.html (дата обращения: 09.02.2024). – Режим доступа: для авторизир. пользователей. – Текст: электронный.

5. Гортинский, В. В. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях / В. В. Гортинский, А. Б. Демский, М. А. Боркин. – Москва: Колос, 1980. – 304 с. – Текст: непосредственный.

6. Федоренко, И. Я. Вибрационные машины и процессы в АПК: монография / И. Я. Федоренко. – Барнаул: РИО Алтайского ГАУ, 2016. – 285 с. –Текст: непосредственный.

7. Лушников Б. В. Вибродиагностика параметров сухого некулонова трения при фрикционных автоколебаниях / Б. В. Лушников. – Текст: электронный // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 1. – URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=8252 (дата обращения: 28.06.2026).

References

1. Blekhman, I. I. Vibratsionnaya mekhanika / I. I. Blekhman. – Moskva: Fizmatlit, 1994. – 400 s.

2. Vibratsii v tekhnike: spravochnik. V 6 t. / redaktsionnyy sovet V. N. Chelomey (pred.). – Moskva: Mashinostroenie, 1979. – T. 2. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem / pod redaktsiey I. I. Blekhmana. – 1979. – 351 s.

3. Vibratsii v tekhnike: spravochnik. V 6 t. / redaktsionnyy sovet V. N. Chelomey (pred.). – Moskva: Mashinostroenie, 1981. – T. 4. Vibratsionnye mashiny i protsessy / pod redaktsiey E. E. Lavendela. – 1981. – 509 s.

4. Panovko, G. Ya. Dinamika vibratsionnykh tekhnologicheskikh protsessov / G. Ya. Panovko. – Moskva, Izhevsk: Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Institut kompyuternykh issledovaniy, 2019. – 176 c. – ISBN 978-5-4344-0711-3. – URL: https://www.iprbookshop.ru/91927.html (data obrashcheniya: 09.02.2024).

5. Gortinskiy, V. V. Protsessy separirovaniya na zernopererabatyvayushchikh predpriyatiyakh / V. V. Gortinskiy, A. B. Demskiy, M. A. Boriskin. – Moskva: Kolos, 1980. – 304 s.

6. Fedorenko, I. Ya. Vibratsionnye mashiny i protsessy v APK: monografiya / I.Ya. Fedorenko. – Barnaul: RIO Altayskogo GAU, 2016. – 285 s.

7. Lushnikov B. V. Vibrodiagnostika parametrov sukhogo nekulonova treniya pri friktsionnykh avtokolebaniyakh // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. 2013. No. 1; URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=8252 (data obrashcheniya: 28.06.2026).

✦ ✦ ✦